

**NE PAS OUVRIR AVANT LE DÉBUT DE  
L'EXAMEN**

**SIE Physique Générale II**  
**Examen de printemps**

19 juin 2015

NOM

PRÉNOM

Les seuls objets autorisés sont : une feuille aide-mémoire A4 manuscrite recto-verso, stylos.

Téléphone, ordinateur et calculatrice ne sont pas autorisés.

Les réponses finales à chaque question doivent être reportées sur l'énoncé dans les cases prévues à cet effet. La justification détaillée et propre est à rendre sur des feuillets indépendants.

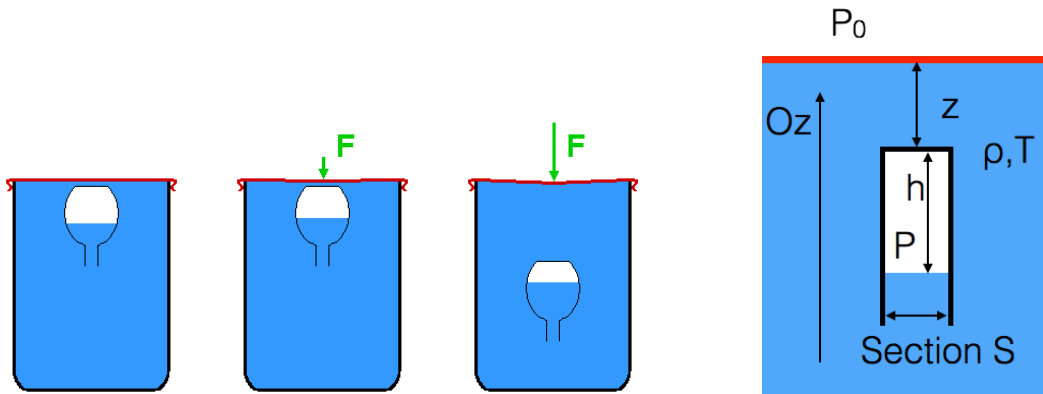
Un feuillet par exercice. Inscrivez votre nom sur chacun des feuillets ! Numéroté les pages de la façon suivante :  $1/n$ , ...,  $n/n$ , où  $n$  est le nombre total de feuilles.

L'examen comporte 12 pages et contient 5 exercices, numérotés de 1 à 5. Le nombre de points maximum pour cet examen est de 50 points.

**NE PAS OUVRIR AVANT LE DÉBUT DE  
L'EXAMEN**

**Exercice 1 (8 points)      *Le ludion***

Un ludion est un petit montage de physique souvent présenté comme une curiosité de salon ou comme un jouet. Il est constitué d'un objet creux rempli d'air, dont l'ouverture est vers le bas. Cet objet est immergé dans un récipient contenant de l'eau et fermé par une membrane élastique. L'air qu'il contient sert à le faire flotter. L'application d'une pression sur la membrane fait descendre l'objet creux et le relâchement de la pression le fait remonter (voir figure ci-dessous).



On considérera un flotteur de forme cylindrique de section  $S$  convenablement lesté pour que l'ouverture soit vers le bas. On note  $V$  le volume de gaz présent dans le ludion,  $h$  la hauteur de la colonne de gaz,  $z$  la profondeur du ludion mesurée depuis le sommet du ludion. On considère le volume des parois négligeable. À l'intérieur, il y a  $n$  moles d'air considéré comme un gaz parfait. La pression du gaz est notée  $P$ . L'eau est considérée comme un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  et est à la température  $T$ . On note  $P_0$  la pression appliquée sur la membrane. En l'absence de force appliquée sur la membrane,  $P_0$  est égale à la pression atmosphérique,  $P_{\text{atm}}$ .

1. En appliquant les lois de l'hydrostatique, exprimer la pression  $P$  du gaz dans le ludion en fonction de  $P_0$ ,  $\rho$ ,  $z$ ,  $h$  et l'accélération de la pesanteur  $g$ .

$$P = \dots\dots\dots$$

2. On considère que le gaz dans le ludion reste à la température  $T$ , les évolutions sont isothermes et quasi-statiques. Écrire la relation des gaz parfaits satisfaite par le gaz en explicitant  $P$  et  $V$  en fonction de  $P_0$ ,  $\rho$ ,  $z$ ,  $h$ ,  $g$  et  $S$ .

$$nRT = \dots\dots\dots$$

3. On note  $M$  la masse totale du ludion. Exprimer la force d'Archimède qui s'exerce sur le ludion et en déduire la condition indiquant si le ludion monte

ou bien coule en fonction de  $M$ ,  $S$ ,  $h$  et  $\rho$ .

- $> 0$  le ludion monte
- $= 0$  le ludion reste immobile
- $< 0$  le ludion coule

4. En éliminant  $h$  entre les résultats obtenus aux questions 2 et 3, exprimer la pression  $P_t$  qui doit être exercée sur la membrane pour que le ludion reste immobile, c'est-à-dire telle que :

- $P_0 > P_t$  le ludion coule
- $P_0 = P_t$  le ludion reste immobile
- $P_0 < P_t$  le ludion monte

$$P_t = \dots\dots\dots$$

5. Le ludion est en haut ( $z = 0$ ) et  $P_0 = P_{\text{atm}}$ , la quantité de gaz est telle qu'il flotte. Quelle est la surpression  $P_{\text{appl}}$  à appliquer sur la membrane pour le faire couler ?

$$P_{\text{appl}} = \dots\dots\dots$$

AN :  $T = 300 \text{ K}$ ,  $R = 8 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ,  $\rho = 103 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ,  $M = 30 \text{ g}$ ,  $S = 3 \text{ cm}^2$ ,  $n = 1,5 \times 10^{-3} \text{ mol}$ ,  $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ N m}^{-2}$ . Si on appuie avec un doigt de surface  $1 \text{ cm}^2$ , quelle est la force  $F_{\text{appl}}$  à exercer sur la membrane ?

$$P_{\text{appl}} = \dots\dots\dots$$

$$F_{\text{appl}} = \dots\dots\dots$$

6. Le récipient ne doit pas être trop long : quelle est la profondeur critique  $z_c$  pour laquelle le ludion ne pourra plus remonter lorsque l'on cesse d'appliquer  $P_{\text{appl}}$  (c'est à dire lorsque  $P_0$  reprend sa valeur  $P_{\text{atm}}$ ) ?

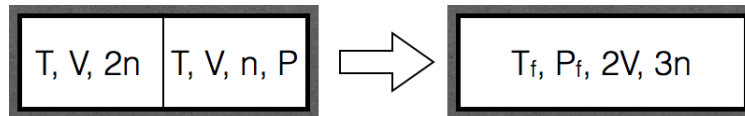
$$z_c = \dots\dots\dots$$

AN :

$$z_c = \dots\dots\dots$$

**Exercice 2 (10 points)      Réunion de deux enceintes contenant le même gaz**

Soit une enceinte rigide isolée thermiquement de l'extérieur et comprenant deux compartiments. Les deux compartiments de volume identique  $V$  contiennent le même gaz. L'ensemble est à la température  $T$ . Un compartiment contient  $n$  moles de gaz à la pression  $P$  et l'autre  $2n$  moles. À un instant donné on casse la paroi intermédiaire entre les deux compartiments.



1. *Démontrer* que si le gaz est un gaz parfait alors la température finale  $T_f$  est inchangée, soit  $T_f = T$ .
2. Calculer  $T_f$  dans le cas où le gaz est un gaz de Van der Waals. On donne l'énergie interne d'un gaz de Van der Waals :

$$U_{\text{VdW}} = nC_{vm}T - \frac{an^2}{V},$$

où  $a$  est un coefficient qui dépend du gaz et  $C_{vm}$  la capacité calorifique molaire à volume constant.

$$T_f = \dots\dots\dots$$

*Dans la suite du problème on considère le gaz comme un gaz parfait.*

3. Calculer la pression finale  $P_f$  en fonction de la pression  $P$ .

$$P_f = \dots\dots\dots$$

4. Dans le calcul de l'entropie, faut-il tenir compte d'une entropie de mélange ? Justifiez votre réponse.

☐ Oui                      ☐ Non

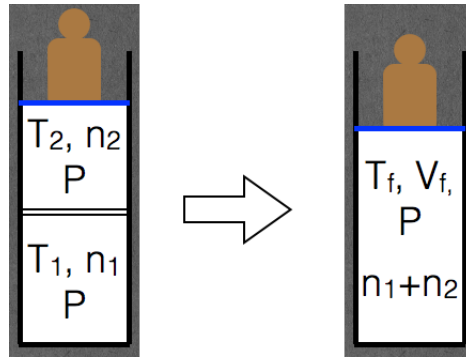
5. Calculer l'entropie d'échange et l'entropie interne créée. La transformation est-elle réversible ou bien irréversible, pourquoi ?

$$\Delta S_{\text{ext}} = \dots\dots\dots$$

$$\Delta S_{\text{int}} = \dots\dots\dots$$

☐ Réversible                      ☐ Irréversible

On considère maintenant que l'enceinte est fermée par un piston mobile qui maintient une pression  $P$  constante, l'ensemble est isolé thermiquement. Les deux compartiments sont séparés par une paroi mobile calorifugée (thermiquement isolante). Dans un compartiment il y a  $n_1$  moles de gaz à la température  $T_1$  et dans le second  $n_2$  moles à la température  $T_2$ . On brise la paroi entre les deux compartiments.



6. L'énergie interne n'est pas le meilleur choix de fonction d'état pour étudier ce problème. Quelle est la fonction d'état la mieux appropriée ? Pourquoi ?
7. Calculer la température finale et le volume final.

$$T_f = \dots\dots\dots$$

$$V_f = \dots\dots\dots$$

### Exercice 3 (8 points) *Mesure du nombre d'Avogadro par Jean Perrin*

En 1908 Jean Perrin\* effectue une des premières mesures du nombre d'Avogadro,  $N_A$ , en étudiant la distribution de très fines gouttelettes de gomme-gutte<sup>†</sup> en suspension dans l'eau à la température  $T$ . Il trouva que le rapport,  $\alpha$ , de la densité de particules dans des couches horizontales distantes verticalement de  $h = 30 \mu\text{m}$  était  $\alpha = 2,02$  (la densité de gouttelettes diminuant avec la hauteur).

1. À l'équilibre (particule statique), quelles sont les forces qui s'exercent sur une gouttelette de rayon  $a$  (les deux fluides sont incompressibles) ? On notera  $\rho$  la masse volumique de la gomme-gutte,  $\rho_0$  la masse volumique de l'eau et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

\*. J. Perrin a obtenu le prix Nobel en 1926 pour ses travaux sur les mécanismes de sédimentation et sur le mouvement Brownien, qui confirmaient avec un excellent accord les prédictions théoriques de A. Einstein.

†. La gomme-gutte est un pigment jaune orangé d'origine végétale. Elle est surtout utilisée en couleur à l'eau notamment pour des aquarelles, c'est le colorant qui est utilisé pour donner la couleur safran des robes des moines bouddhistes theravada. Les propriétés qui nous intéressent ici sont qu'elle peut former dans l'eau des émulsions de fines gouttelettes dont la masse volumique est très légèrement supérieure à celle de l'eau, de par sa couleur les gouttelettes sont aussi facilement discernables de l'eau environnante.

$$\sum \vec{F} = \quad + \quad =$$

2. En déduire l'énergie potentielle d'une gouttelette de gomme-gutte dans le champ de pesanteur terrestre.

$$E_{\text{pot}} = \dots\dots\dots$$

3. Les gouttelettes sont aussi animées d'un mouvement autour de leur position moyenne. Écrire l'énergie mécanique totale moyenne d'une gouttelette à une hauteur  $z$  en fonction de sa vitesse quadratique moyenne  $\langle v^2 \rangle$  de l'expression obtenue en 2 de son énergie potentielle.

$$\langle E_{\text{mec}} \rangle = \dots\dots\dots$$

Le terme en  $\langle v^2 \rangle$  dépend-il de la hauteur  $h$  ? Justifiez.

☐ Oui                      ☐ Non

4. En admettant que les particules sont distribuées dans le champ de pesanteur selon la loi de Boltzmann, calculer  $\mathcal{N}_A$  (rappel :  $k_B = \mathcal{N}_A/R$ , avec  $R$  la constante des gaz parfaits,  $\mathcal{N}_A$  le nombre d'Avogadro et  $k_B$  la constante de Boltzmann).

$$\mathcal{N}_A = \dots\dots\dots$$

AN :  $\rho = 1,2097 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $\rho_0 = 1,003 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $a = 0,212 \mu\text{m}$ ,  
 $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ,  $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ , on donne aussi  $\ln(2,02) = 0,7031$ .  
Donner un ordre de grandeur uniquement.

$$\mathcal{N}_A = \dots\dots\dots$$

#### Exercice 4 (12 points)                      *Cycle de Stirling*

On s'intéresse à un moteur de Stirling fonctionnant avec une mole de gaz parfait. On rappelle que le cycle de Stirling est composé de deux isothermes et deux isochores. On appelle respectivement  $T_c$  et  $T_f$  les températures chaude et froide des isothermes. On notera A, B, C et D les points du cycle de manière que  $V_A$  soit le volume minimal et  $V_B$  le volume maximal.

1. Tracez le cycle (réversible) dans un diagramme  $(p, V)$  ; identifiez le sens de parcours et les points ABCD.



2. Le piston moteur (qui est en jeu dans les isothermes) subit maintenant un frottement sec. On suppose les coefficients de frottement statiques et dynamiques égaux ; les frottements se traduisent par une force de norme  $F$  durant tout le trajet du piston, qui se fait sur une longueur  $l$ . Les transformations sont quasi-statiques. On néglige la capacité calorifique du piston devant celle du gaz, que l'on note  $C_v$ . La partie mobile du piston est calorifugée et ne permet pas d'échange de chaleur avec l'extérieur. Un régénérateur permet de recycler toute la chaleur entre les isochores.

La transformation le long des isothermes est-elle réversible ? Justifiez.

☐ Oui                      ☐ Non

3. Calculez les travaux  $W_{AB}$  et  $W_{CD}$  reçus par le gaz le long des isothermes, en tenant compte des frottements secs.
4. Calculez  $Q$  et  $\Delta U$  le long de ces mêmes isothermes.
5. Calculez  $\Delta S$  le long de ces mêmes isothermes.
6. Calculez  $W$ ,  $Q$ ,  $\Delta U$  et  $\Delta S$  le long des isochores.

Les résultats sont à donner en fonction de  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $T_f$ ,  $T_c$ ,  $C_v$ ,  $F$ ,  $l$  et  $R$  et à synthétiser dans le tableau ci-dessous. Pour les calculs intermédiaires, on pourra noter  $P$  la pression du gaz et  $P_{\text{ext}}$  la pression appliquée sur le piston par l'extérieur.

	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$C \rightarrow D$	$D \rightarrow A$
$W$	.....	.....	.....	.....
$Q$	.....	.....	.....	.....
$\Delta U$	.....	.....	.....	.....
$\Delta S$	.....	.....	.....	.....

7. Quelle est la condition sur  $F$  pour que le moteur fonctionne ? Que se passe-t-il sinon ?

.....

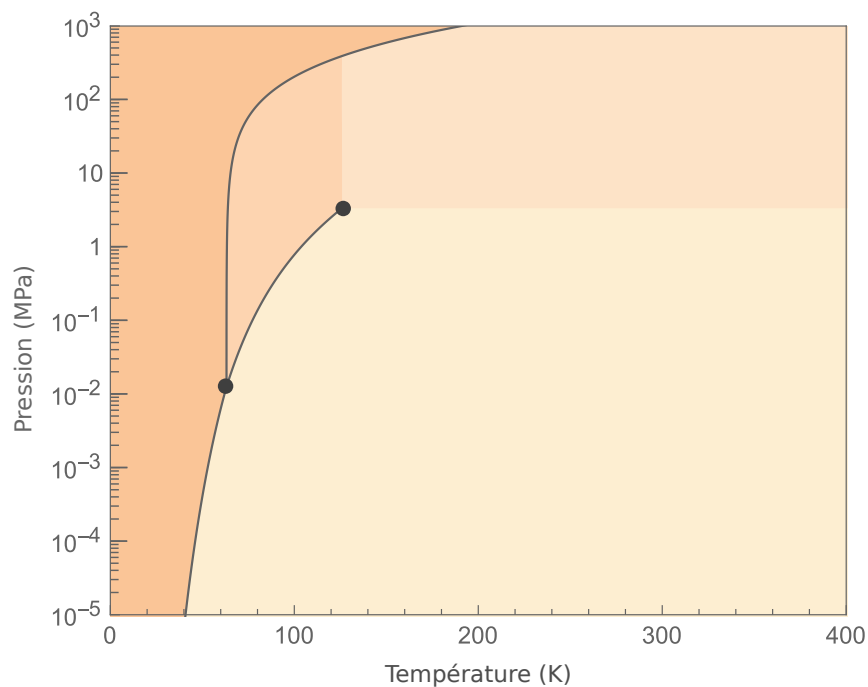
En supposant cette condition remplie, quelle est l'efficacité  $\eta$  du moteur ?

$$\eta = \dots\dots\dots$$

### Exercice 5 (12 points)      *Liquéfaction de l'azote*

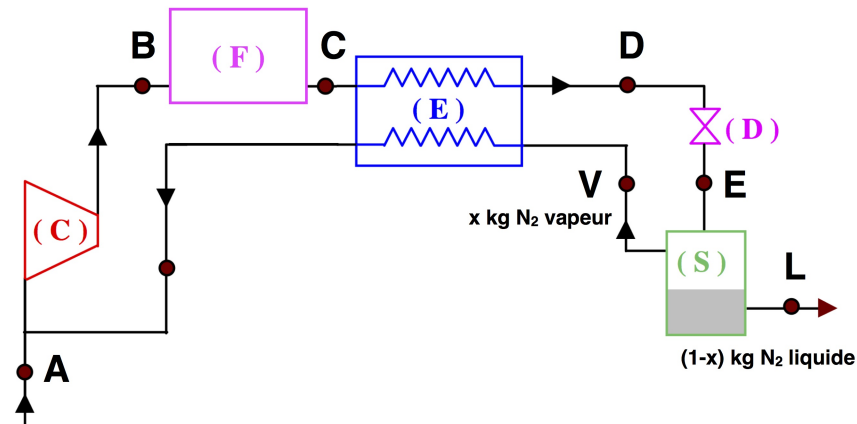
On s'intéresse à la liquéfaction de l'azote selon le processus de Linde. Le but est d'estimer l'énergie nécessaire à liquéfaction d'un kg d'azote.

- Le schéma suivant représente le diagramme de phase de l'azote  $N_2$ . Identifier les différentes phases, et nommer les points importants. Quelle est la température de l'azote liquide dans un récipient ouvert à pression atmosphérique ?





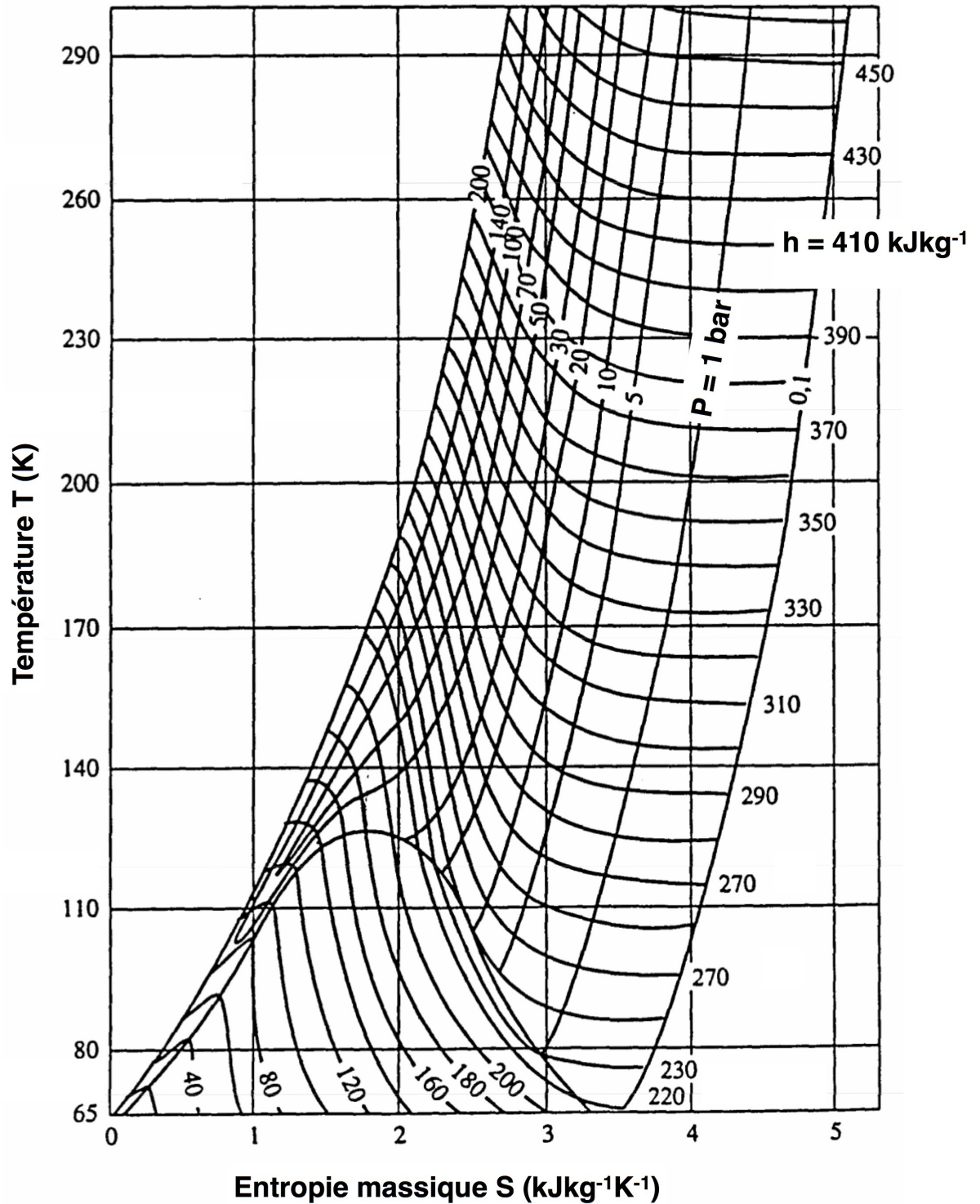
Le procédé de Linde pour liquéfier l'azote est représenté dans le graphe ci-dessous.



Un kilogramme d'azote gazeux à 290 K et 1 bar est introduit en A. Il subit une compression *isotherme* (C) qui l'amène à  $p_B = 200$  bar. La machine frigorifique (F) le refroidit à pression constante jusqu'à  $T_C = 220$  K, puis l'échangeur de chaleur (E) lui permet d'échanger avec le reste d'azote gazeux pour atteindre  $T_D = 158$  K, toujours à pression constante. Dans le détendeur, l'azote est ramené rapidement à pression atmosphérique (E) à *enthalpie constante*. Un récipient permet de séparer la partie liquide (L), qui est stockée, de la partie vapeur (V) qui repart dans l'échangeur de chaleur, où il va se réchauffer à 220 K tout en refroidissant le fluide entrant.

**Notation :** On appelle  $Q_{ij}$  et  $W_{ij}$  la chaleur et le travail reçus par 1 kg de  $N_2$  entre  $i$  et  $j$  (par exemple,  $Q_{AB}$  dénote la chaleur reçue entre A et B,  $Q_{BC}$  celle reçue entre B et C, etc.).

On donne le diagramme  $(T, S)$  de l'azote, sur lequel on a représenté les isobares et les courbes isenthalpiques ( $H = \text{cste}$ ).



2. Représenter les points A, B, C, D, E, L et V sur le diagramme  $(T, S)$ .
3. Lire la température  $T_E$  sur le diagramme.

$T_E = \dots\dots\dots$

4. On considère la partie AB, supposée réversible, au cours de laquelle le gaz est comprimé.

- a) À la lecture du diagramme  $(T,S)$ , indiquez dans quel domaine le modèle des gaz parfaits est valable. *Justifiez votre réponse.* Indiquez le domaine sur le diagramme.

.....

Afin d'estimer les ordres de grandeurs du travail, nous ferons quand même l'hypothèse que l'azote se comporte comme un gaz parfait *dans le compresseur uniquement*.

- b) Calculer  $Q_{AB}$  en fonction de  $T_A$ ,  $S_A$  et  $S_B$ .

$$Q_{AB} = .....$$

- c) Estimer numériquement l'ordre de grandeur de  $Q_{AB}$ .

$$Q_{AB} = .....$$

- d) Dans l'hypothèse où l'azote moléculaire est un gaz parfait, calculer  $W_{AB}$  en fonction des températures et pressions connues ainsi que de la masse molaire de l'azote moléculaire, notée  $M_{N_2}$ .

$$W_{AB} = .....$$

- e) Estimer numériquement l'ordre de grandeur de  $W_{AB}$  ( $M_{N_2} = 28 \text{ g mol}^{-1}$ ).

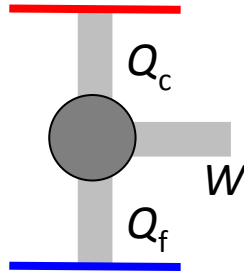
$$W_{AB} = .....$$

- f) Quelle relation devrait-on avoir entre  $W_{AB}$  et  $Q_{AB}$  pour un gaz parfait ? Conclure sur la légitimité de l'approximation que le gaz se comporte comme un gaz parfait.

.....

5. On se propose à présent d'étudier la machine frigorifique M. Elle est de type pompe-à-chaleur/frigo, avec une efficacité de  $\eta = 3$ .

- a) Compléter le schéma ci-dessous avec le sens des échanges d'énergie. Identifier  $Q_{BC}$  et  $W_{BC}$  sur le schéma.



- b) Calculer  $Q_{BC}$  en fonction de l'enthalpie du gaz aux points B et C ( $H_B$  et  $H_C$ ).

$$Q_{BC} = \dots\dots\dots$$

- c) Évaluer numériquement  $Q_{BC}$ .

$$Q_{BC} = \dots\dots\dots$$

- d) Exprimer  $W_{BC}$  en fonction de  $Q_{BC}$  et  $\eta$ .

$$W_{BC} = \dots\dots\dots$$

- e) Évaluer numériquement  $W_{BC}$ .

$$W_{BC} = \dots\dots\dots$$

6. On considère enfin l'étude de la détente. Le détendeur est un simple robinet sans pièce mécanique, et la détente est de type Joule-Thomson (enthalpie constante). Pour 1 kg d'azote moléculaire à 200 bar, on obtient  $x$  kg d'azote sous forme gazeuse et  $(1 - x)$  kg sous forme liquide.

- a) Donner  $x$  en fonction de  $S_E$ ,  $S_V$ , et  $S_L$ .

$$x = \dots\dots\dots$$

- b) Évaluer  $x$  numériquement.

$$x = \dots\dots\dots$$

7. Quelle est l'énergie requise pour liquéfier 1 kg d'azote si l'installation n'a pas de pertes ?

$$E = \dots\dots\dots$$

Donnée utile :  $\ln(200) = 5,3$ .